Cisimlerin Hacimleri

Bu bölümde verilen bir eğrinin bir doğru etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayacağız. Etrafında dönme yapılan doğruya dönme ekseni, oluşan cisme ise dönel cisim denir.

Dönel cisimlerin hacmini bulmak için disk veya kabuk yöntemi kullanılır. İki metodun özünde de dairesel dik silindirin hacmi vardır.

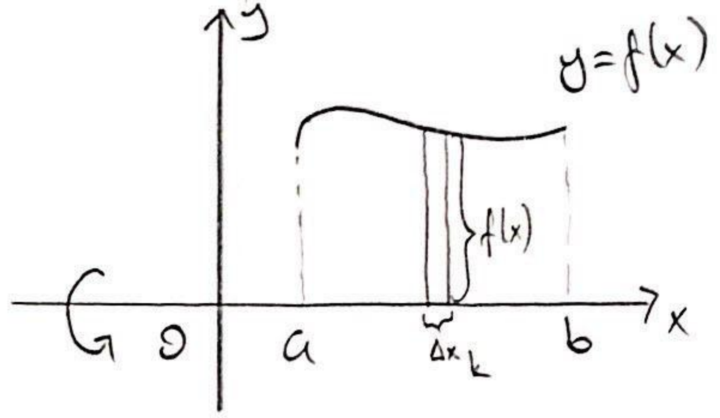
Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan bir dairesel dik silindirin hacmi

$$V = \pi r^2 h$$

dır.

1) Disk yöntemi

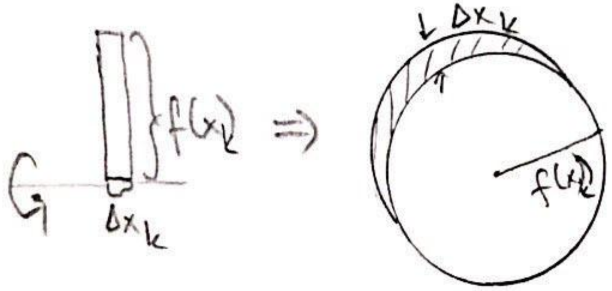
$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Bu eğrinin $[a,b]$ aralığında kalan kısmının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



$[a,b]$ aralığını n parçaya bölelim. Her bir dikdörtgenin dönmesiyle yarıçapı $f(x_k)$, yüksekliği Δx_k olan bir silindir oluşur. Bu silindirin hacmi

$$V_k = \pi (f(x_k))^2 \Delta x_k$$

dır. O halde oluşan cismin hacmi



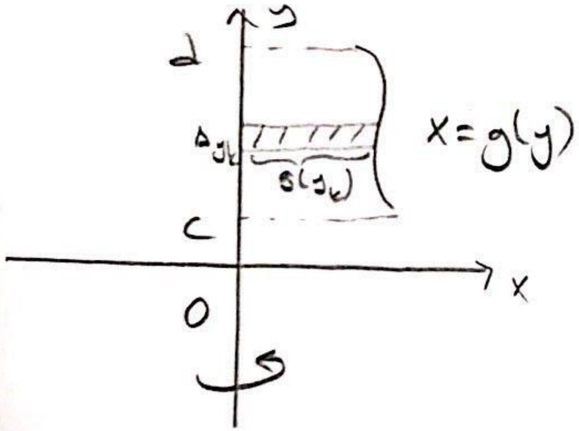
$$V \approx \sum_{k=1}^{n} V_k$$

ve

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} V_k = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

dır.

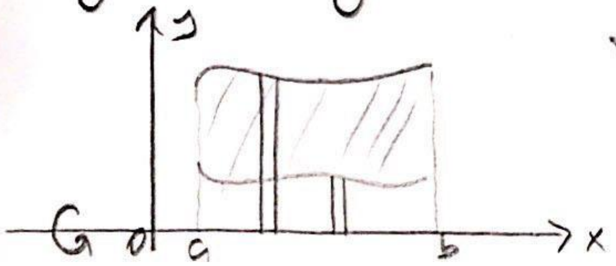
Benzer şekilde $x=g(y)$ eğrisinin $[c,d]$ aralığında kalan parçasının y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi



$$V=\pi\int_c^d (g(y))^2\,dy$$

dir.

Not: $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ eğrileri ile $x=a$, $x=b$ doğrularının sınırladığı bölgenin x ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen cismin hacmi



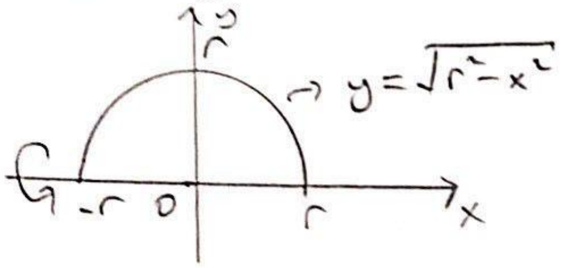
V= Dıştaki eğrinin dönmesiyle oluşan hacim

- içteki " " " "

$$=\pi\int_a^b [(f_1(x))^2-(f_2(x))^2]\,dx$$

Örnek: r yarıçaplı kürenin hacmini bulalım.

r yarıçaplı küre, r yarıçaplı merkezil çemberin x ekseni veya y ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir.



$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y=\mp\sqrt{r^2-x^2}$$

$$\Rightarrow V=\pi\int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r}=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Örnek: $y=\sqrt{x}$ eğrisi, x ekseni ve $x=2$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin

a) x ekseni,

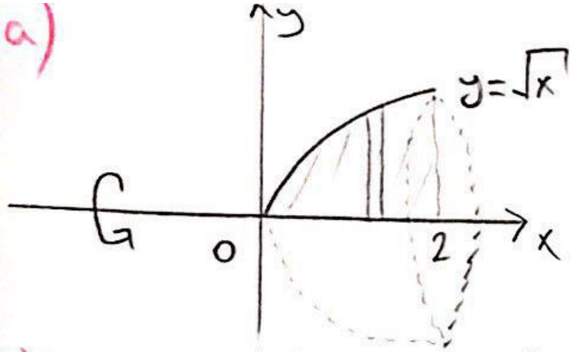
b) $y=-1$ doğrusu

c) $x=2$ doğrusu

d) $x=-1$ doğrusu

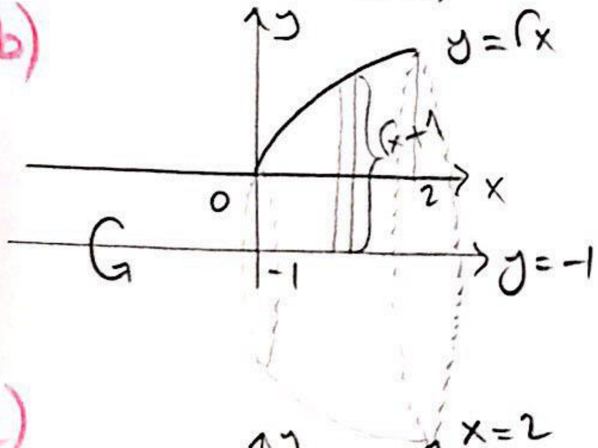
etrafında döndürülmesiyle oluşan cisimlerin hacimlerini bulalım.

a)



$$V=\pi\int_0^2(\sqrt{x})^2dx=\pi\int_0^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}x^2\Big|_0^2=2\pi$$

b)

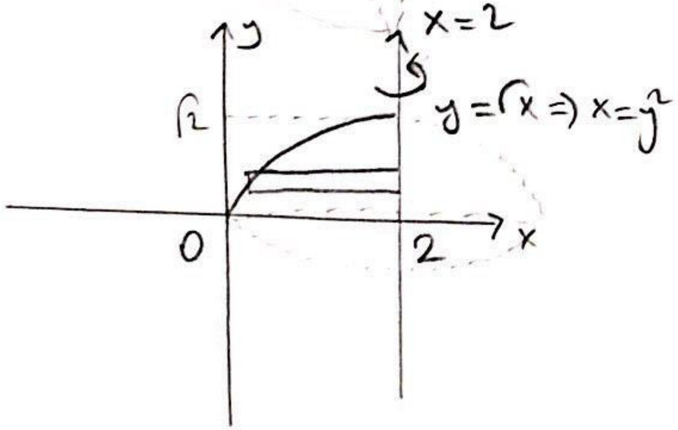


$$V=\pi\int_0^2(\sqrt{x}+1)^2dx=\pi\int_0^2(x+2\sqrt{x}+1)\,dx$$

$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{3/2}+x\right)\Big|_0^2$$

$$=\pi\left(2+\frac{8\sqrt{2}}{3}+2\right)=\pi\left(4+\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

c)

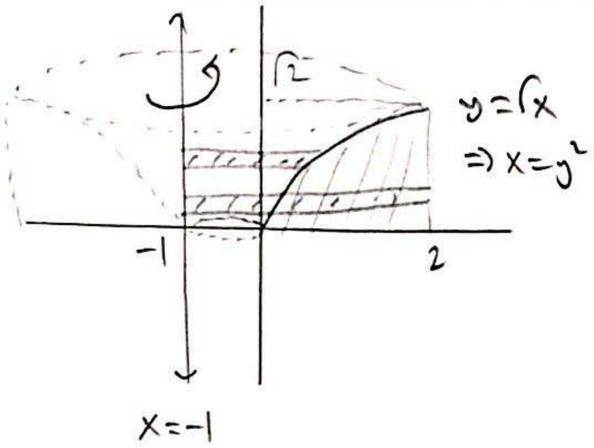


$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(2-y^2)^2dy=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(4-4y^2+y^4)\,dy$$

$$=\pi\left(4y-\frac{4}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left(4\sqrt{2}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)=\pi\frac{32\sqrt{2}}{15}$$

d)



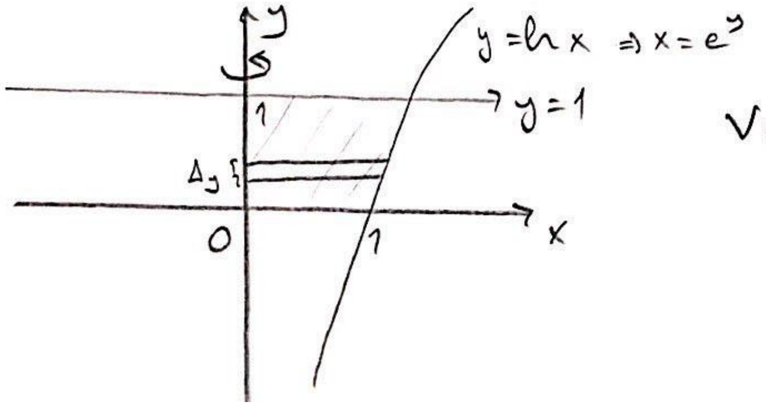
$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}} 9\,dy-\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(y^2-(-1)\right)^2 dy$$

$$=9\sqrt{2}\pi-\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(y^4+2y^2+1\right)dy$$

$$=9\sqrt{2}\pi-\pi\left(\frac{y^5}{5}+\frac{2y^3}{3}+y\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=9\sqrt{2}\pi-\pi\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}+\frac{4\sqrt{2}}{3}+\sqrt{2}\right)=\frac{88\sqrt{2}}{15}\pi$$

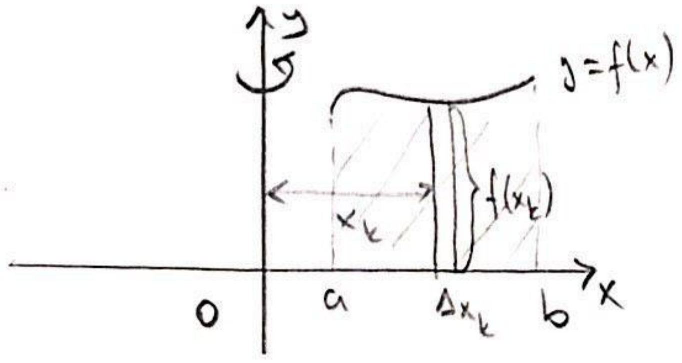
Örnek: $y=\ln x$ eğrisi, x ekseni, y ekseni ve $y=1$ doğrusu arasında kalan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.

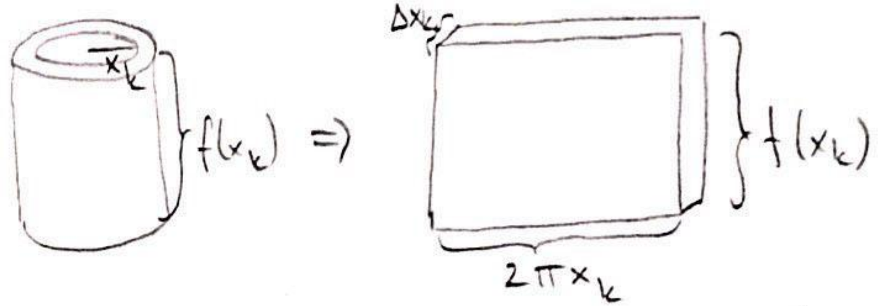


$$V=\pi\int_0^1 (e^y)^2 dy=\frac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(e^2-1)$$

2) Kabuk yöntemi

$y=f(x)$ eğrisi, x ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğrularının sınırladığı bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım. $[a,b]$ aralığı n parçaya bölündüğünde her bir şeritin döndürülmesiyle içi boş silindirler oluşur.





İçi boş silindiri açtığımızda bir kenarı $f(x_k)$, diğer kenarı $2\pi x_k$ ve kalınlığı Δx_k olan dikdörtgen prizma elde ederiz. O halde içi boş silindirin hacmi

$$V_k = 2\pi x_k f(x_k)\Delta x_k$$

olur. Aranan hacim ise

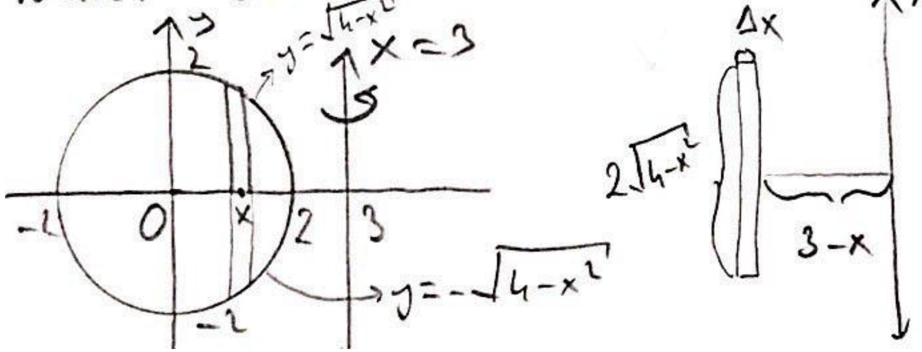
$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k f(x_k)\Delta x_k = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

dir. Benzer şekilde $x=g(y)$ eğrisi, y ekseni, $y=c$ ve $y=d$ doğrularının sınırladığı bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d y\,g(y)\,dy$$

dir.

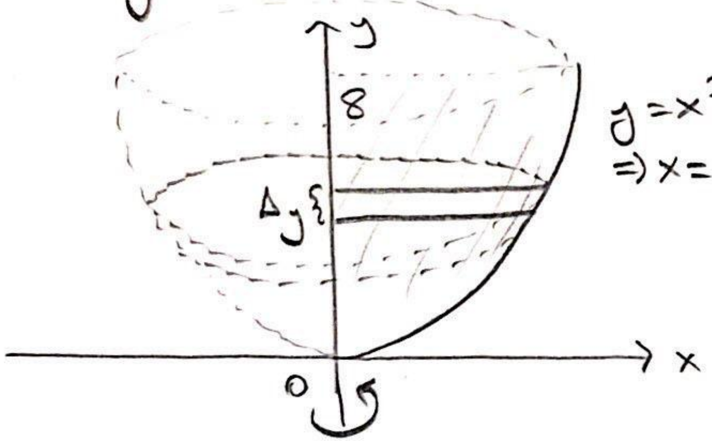
Örnek: $x^2+y^2=4$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin $x=3$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



$$V = 2\pi \int_{-2}^{2} (3-x)\,2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 24\pi$$

Örnek: 1. bölgede $y=x^3$, $y=8$ ve y ekseni tarafından sınırlanan bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.

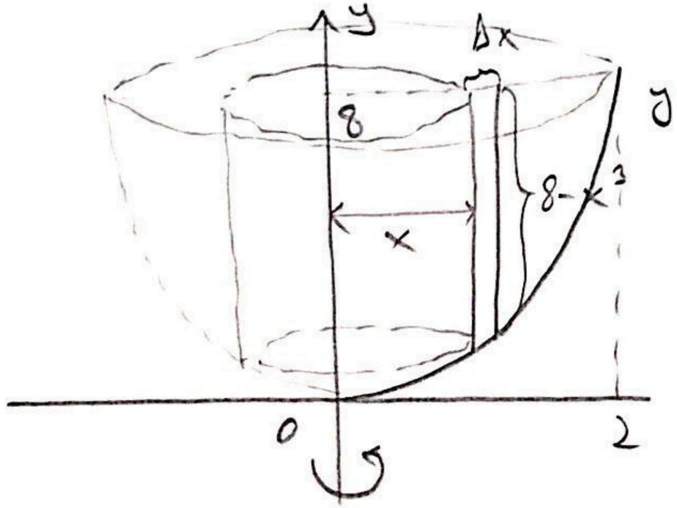


$y=x^3$
$\Rightarrow x=y^{1/3}$

Disk yöntemi ile

$$V=\pi\int_0^8 (y^{1/3})^2\,dy=\frac{3\pi}{5}\,y^{5/3}\Big|_0^8$$

$$=\frac{3\pi}{5}(2^3)^{5/3}=\frac{96}{5}\pi$$



$y=x^3$

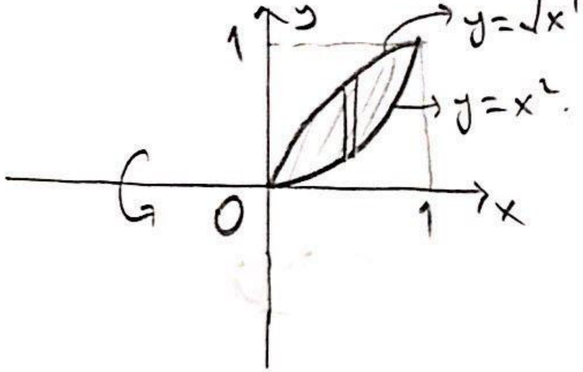
Kabuk yöntemi ile

$$V=2\pi\int_0^2 x(8-x^3)\,dx$$

$$=2\pi\int_0^2 (8x-x^4)\,dx=2\pi\left(4x^2-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2$$

$$=2\pi\left(16-\frac{32}{5}\right)=\frac{96}{5}\pi$$

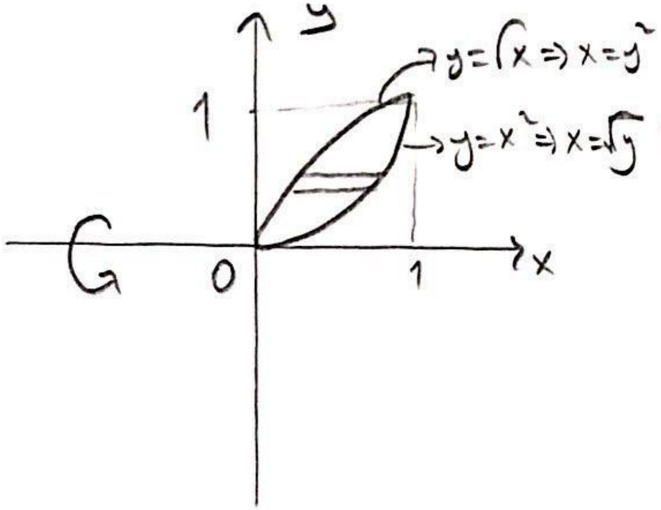
Örnek: 1. bölgede $y=x^2$ ve $y=\sqrt{x}$ eğrilerinin sınırladığı bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.



Disk yöntemi ile

$$V=\pi\int_0^1 x\,dx-\pi\int_0^1 x^4\,dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{10}\pi$$



Kabuk yöntemi ile

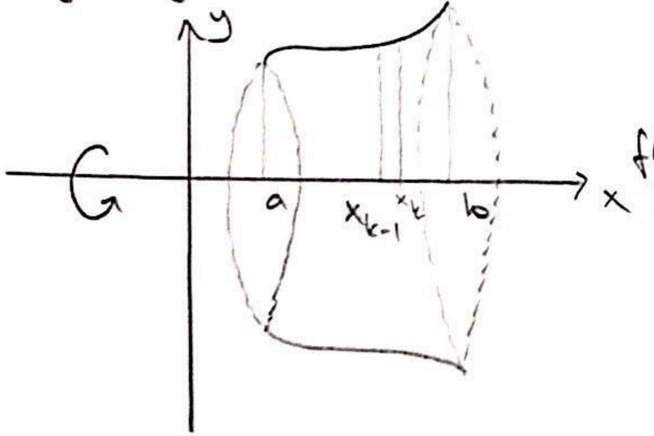
$$V=2\pi\int_0^1 y(\sqrt{y}-y^2)\,dy=2\pi\int_0^1 (y^{3/2}-y^3)\,dy$$

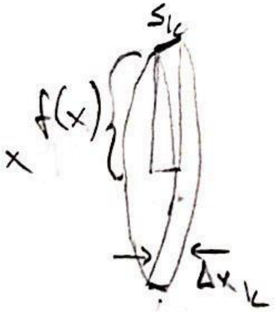
$$=2\pi\left(\frac{2}{5}y^{5/2}-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{3\pi}{10}$$

Dönel cisimlerin yüzey alanı

$y=f(x)$ eğrisinin $[a,b]$ aralığı üzerindeki parçasının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayalım. Yine $[a,b]$ aralığını n parçaya bölelim





$s_k=\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}$

$\Rightarrow$ Eğrinin $[x_{k-1},x_k]$ aralığı üzerindeki parçasının dönmesiyle oluşan yüzey alanı

$$YA_k = 2\pi f(x) s_k$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}$$

$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k, \quad c_k\in[x_{k-1},x_k]$$

Dönel cismin yüzey alanı yaklaşık olarak

$$YA \approx \sum_{k=1}^{n} YA_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(c_k))^2}\,\Delta x_k$$

dır.

$$\Rightarrow YA = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x) \sqrt{1+(f'(c_k))^2}\, \Delta x_k$$

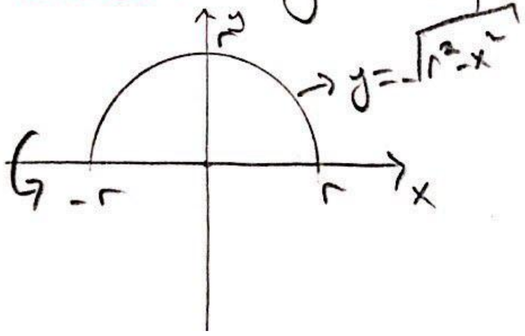
$$\Rightarrow YA = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

Not: $x=g(y)$ eğrisinin $y=c$ ve $y=d$ arasında kalan parçasının y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanı

$$YA = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy$$

dir.

Örnek: r yarıçaplı kürenin yüzey alanını hesaplayalım.



$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow y = \mp\sqrt{r^2-x^2}$$

$$\Rightarrow YA = \int_{-r}^{r} 2\pi \sqrt{r^2-x^2} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$\Rightarrow YA = \int_{-r}^{r} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = \int_{-r}^{r} 2\pi\cancel{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{\frac{r^2}{\cancel{r^2-x^2}}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-r}^{r} r\,dr = 2\pi r x\Big|_{-r}^{r} = 2\pi(r^2+r^2) = 4\pi r^2$$

Örnek: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ eğrisinin $[1,2]$ aralığı üzerindeki parçasının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin yüzey alanını hesaplayalım.

$$y' = x^2 - \frac{1}{4x^2} \Rightarrow \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2} = \sqrt{1+x^4-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}}$$

$$= \sqrt{x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}} = \sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2} = x^2+\frac{1}{4x^2}$$

$$\Rightarrow YA = \int_1^2 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_1^2 2\pi\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}\right)\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$

$$= 2\pi\int_1^2 \frac{4x^4+3}{12x}\,\frac{4x^4+1}{4x^2}\,dx = 2\pi\int_1^2 \frac{16x^8+16x^4+3}{48x^3}\,dx = 2\pi\int_1^2\left(\frac{x^5}{3}+\frac{x}{3}+\frac{1}{16x^3}\right)dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^6}{18}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{32x^2}\right)\Big|_1^2 = 2\pi\left(\frac{\cancel{64}^{\,32}}{\cancel{18}_{\,9}}+\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}}-\frac{1}{128}-\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{6}-\frac{1}{32}\right)\right) = \frac{131}{64}\pi$$